

10 立体の表面積と体積

解 答

1

基礎チェック 1 角柱・円柱の表面積・体積

(1) 表面積を次のように求めた。

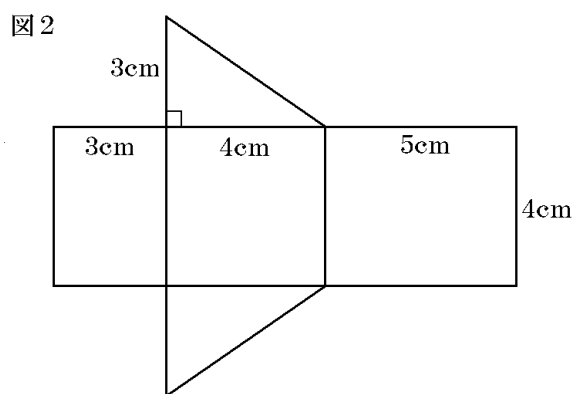
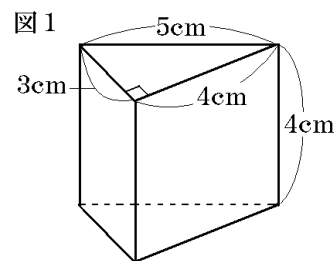
底面の三角形の面積は cm^2 で、2 つあるから、
底面積の合計は cm^2 である。

図 1 の展開図は図 2 のようになる。

側面を 1 つの長方形と考えると、
たては 4cm ，横の合計は cm だから、
側面積は cm^2 である。

底面積と側面積の和が表面積であるから、
表面積は cm^2 となる。

(2) 図 1 の三角柱の体積は cm^3 で
ある。 $6 \times 4 = 24$



基礎チェック 2 角柱・円柱の表面積・体積

(1) 表面積を次のように求めた。

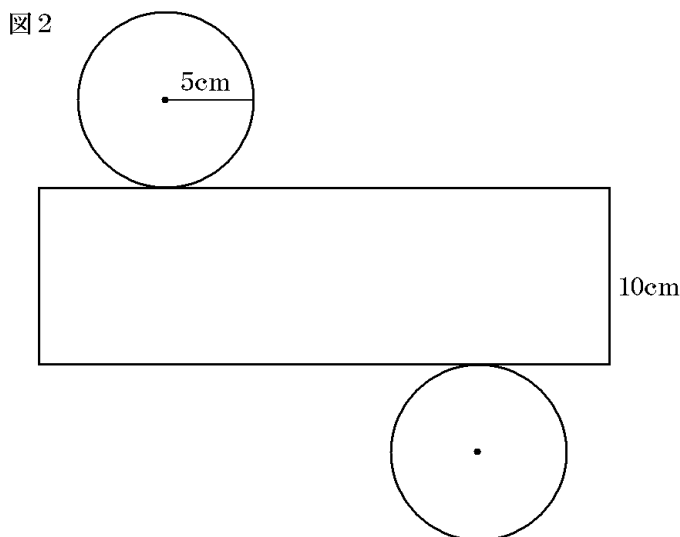
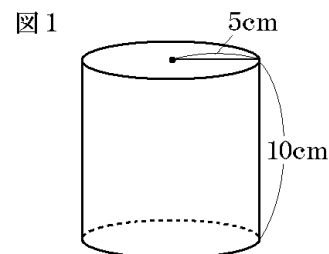
底面の円の面積は cm^2 で、2 つあるから、
底面積の合計は cm^2 である。

図 1 の展開図は図 2 のようになる。
側面を 1 つの長方形と考えると、
たては 10cm ，横は底面の円周だから
 cm ，
側面積は cm^2 である。

底面積と側面積の和が表面積である
から、表面積は cm^2 と
なる。

(2) 図 1 の円柱の体積は
 cm^3 である。

$$\text{底面積} \times \text{高さ} = 25\pi \times 10 = 250\pi$$



基礎チェック 3 角錐・円錐の表面積・体積

- (1) 図1について,
底面の正方形の面積は

$$\boxed{9} \text{ cm}^2,$$

側面は面積 $\boxed{6}$ cm^2 の三角形が
4つあるから、側面積は $\boxed{24}$ cm^2

底面積と側面積の和である表面積は、

$$\boxed{33} \text{ cm}^2 \text{ となる。}$$

図1

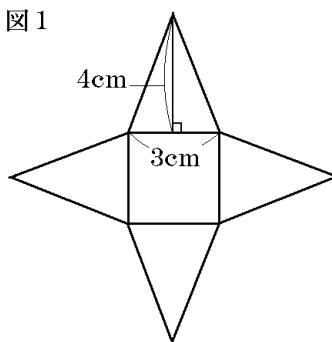
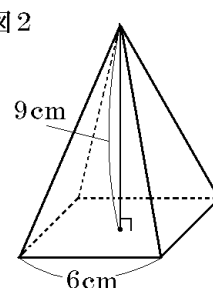


図2



「底面積 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{3}$ 」
だね。

- (2) 図2の正四角錐の体積は、 $\boxed{108}$ cm^3 である。

$$6^2 \times 9 \times \frac{1}{3} = 108$$

基礎チェック 4 角錐・円錐の表面積・体積

- (1) 図1の表面積を求めてみよう。

図2は、図1の展開図である。

底面積は $\boxed{9\pi}$ cm^2 ,

側面はおうぎ形で、おうぎ形の弧の長さ l は、
底面の円周に等しいから $2\pi \times \boxed{3}$ cm ,
半径 5 cm の円周は $2\pi \times \boxed{5}$ cm である。

このため、

半径 5 cm の円に対するおうぎ形の面積の割合
は、弧の長さに比例するから、

$$\frac{2\pi \times \boxed{3}}{2\pi \times \boxed{5}} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$$

となる。これより、

おうぎ形の面積は、 $25\pi \times \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}} = \boxed{15\pi}$ cm^2 である。

また、中心角は、 $x = 360^\circ \times \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}} = \boxed{216}^\circ$ である。

したがって、表面積は $\boxed{24\pi}$ cm^2 となる。

$$\Rightarrow 9\pi + 15\pi = 24\pi$$

- (2) 図1の円錐の体積は、 $\boxed{12\pi}$ cm^3 である。

$$\Rightarrow 9\pi \times 4 \times \frac{1}{3} = 12\pi$$

図1

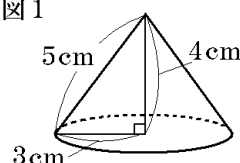
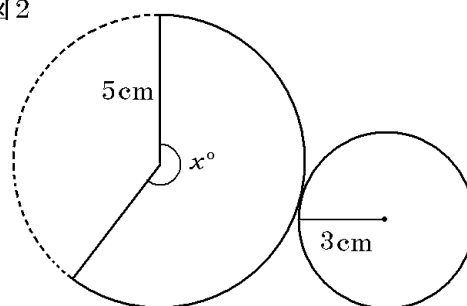


図2



結局、母線の 5 cm と
半径 3 cm の比になるんだ。

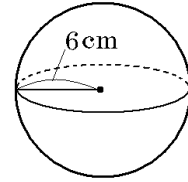
円が関係する面積や体積
では π を忘れずに！



基礎チェック 5 球の表面積・体積

- (1) 半径 6 cm の球の表面積 S は,

$$S = \boxed{4} \pi \times \boxed{6^2} = \boxed{144 \pi} \text{ cm}^2 \text{ である。}$$



- (2) 半径 6 cm の球の体積 V は,

$$V = \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}} \pi \times \boxed{6^3} = \boxed{288 \pi} \text{ cm}^3 \text{ である。}$$

2

基本問題 立体の表面積・体積

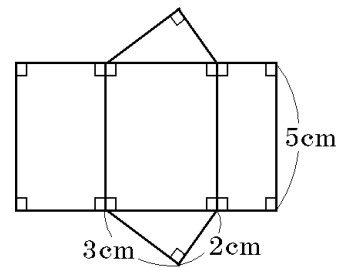
15 cm³

解き方

体積 = 底面積(三角形) × 高さ

$$= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 5 = 15 \text{ (cm}^3\text{)}$$

三角形の面積では, $\times \frac{1}{2}$ を忘れやすいので注意する。



3

基本問題 立体の表面積・体積

- (1) $45 \pi \text{ cm}^3$ (2) $48 \pi \text{ cm}^2$

解き方

- (1) 円柱の体積

= 底面積(円) × 高さ

$$= \pi \times 3^2 \times 5 = 45 \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

- (2) 底面積 = $\pi \times 3^2 \times 2 = 18 \pi \text{ (cm}^2\text{)}$

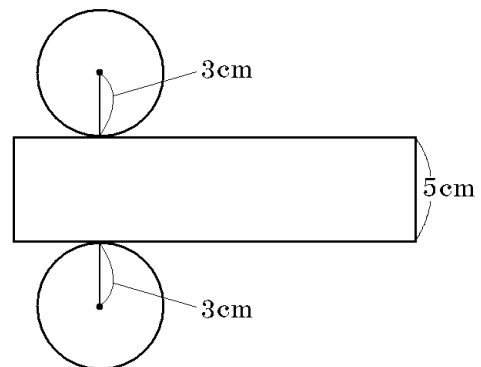
側面の長方形の横の長さは, 底面の円周だから,

$$2 \pi \times 3 = 6 \pi \text{ (cm)}$$

$$\text{側面積} = 6 \pi \times 5 = 30 \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって,

$$\text{円柱の表面積} = 18 \pi + 30 \pi = 48 \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



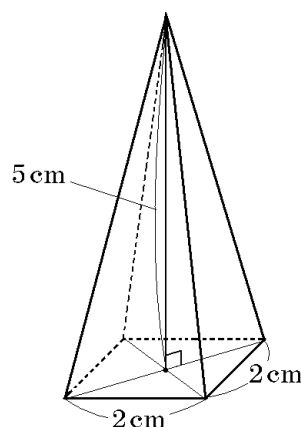
4

基本問題 立体の表面積・体積

$$\frac{20}{3} \text{ cm}^3$$

解き方

$$\begin{aligned} \text{角錐の体積} &= \text{底面積(正方形)} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} \\ &= 2 \times 2 \times 5 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



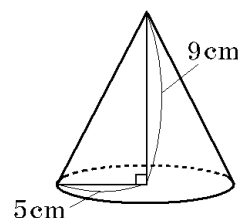
5

基本問題 立体の表面積・体積

$$75\pi \text{ cm}^3$$

解き方

$$\begin{aligned} \text{円錐の体積} &= \text{底面積(円)} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} \\ &= \pi \times 5^2 \times 9 \times \frac{1}{3} = 75\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



6

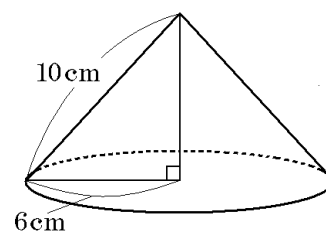
基本問題 立体の表面積・体積

$$(1) 216^\circ \quad (2) 60\pi \text{ cm}^2$$

解き方

ここでは、下の「裏ワザ」を使った求め方を紹介する。

- (1) この円錐の展開図での側面のおうぎ形の中心角は、
半径10cmの円の $\frac{\text{半径}}{\text{母線の長さ}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ にあたる。
したがって中心角は、 $360^\circ \times \frac{3}{5} = 216^\circ$



$$(2) \text{円錐の側面積} = 10 \times 6 \times \pi = 60\pi (\text{cm}^2)$$

解 説

- (1) 展開図での側面のおうぎ形の
弧の長さは、底面の円周に等しい
から、 $2\pi \times 6 (\text{cm})$
半径10cmの円周が $2\pi \times 10 (\text{cm})$
だから、側面のおうぎ形は、円の
 $\frac{2\pi \times 6}{2\pi \times 10} = \frac{6}{10}$ にあたる。

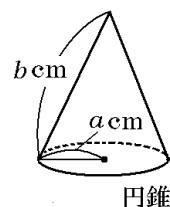
裏ワザ

側面のおうぎ形は、円の $\frac{a}{b}$ にあたる。

おうぎ形の中心角 $= 360^\circ \times \frac{a}{b}$

おうぎ形の面積(側面積) $= \pi \times ab$

$b \times a$ に π をつけば側面積になる。



$$(2) \text{円錐の側面積} = \pi \times 10^2 \times \frac{6}{10} = \pi \times 10 \times 6 = 60\pi (\text{cm}^2)$$

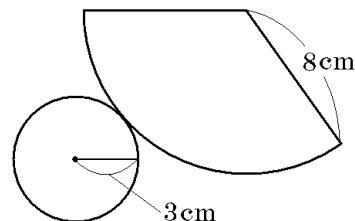
7

基本問題 立体の表面積・体積

(1) 135° (2) $24\pi \text{ cm}^2$

解き方

(1) この円錐の展開図での側面のおうぎ形の中心角は,

半径8cmの円の $\frac{\text{半径}}{\text{母線の長さ}} = \frac{3}{8}$ にあたる。したがって中心角は, $360^\circ \times \frac{3}{8} = 135^\circ$ (2) 側面のおうぎ形の面積 $= 8 \times 3 \times \pi = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

解説

(1) 展開図での側面のおうぎ形の

弧の長さは, 底面の円周に等しいから, $2\pi \times 3 \text{ (cm)}$ 半径8cmの円周が $2\pi \times 8 \text{ (cm)}$

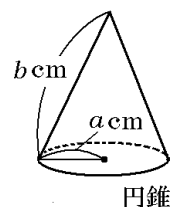
だから, 側面のおうぎ形は, 円の

 $\frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 8} = \frac{3}{8}$ にあたる。

(2) 円錐の側面積

$$= \pi \times 8^2 \times \frac{3}{8} = \pi \times 8 \times 3 = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

裏ワザ

側面のおうぎ形は, 円の $\frac{a}{b}$ にあたる。おうぎ形の中心角 $= 360^\circ \times \frac{a}{b}$ おうぎ形の面積(側面積) $= \pi \times ab$ $b \times a$ に π をつけば側面積になる。

8

基本問題 立体の表面積・体積

 $56\pi \text{ cm}^2$

解き方

底面は半径4 cmの円だから,

$$\text{底面積} = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

側面のおうぎ形の面積 = 母線の長さ $\times$ 底面の半径 $\times \pi$

$$= 10 \times 4 \times \pi = 40\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

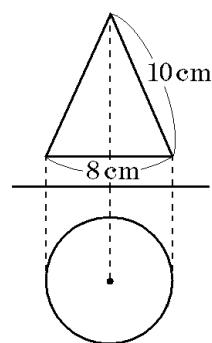
したがって, 表面積は, $16\pi + 40\pi = 56\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

解説

展開図での側面のおうぎ形の弧の長さは,

底面の円周に等しいから $2\pi \times 4 \text{ (cm)}$ 半径10cmの円周が $2\pi \times 10 \text{ (cm)}$ だから, 側面のおうぎ形は, 円の $\frac{2\pi \times 4}{2\pi \times 10} = \frac{4}{10}$ にあたる。

$$\text{側面のおうぎ形の面積} = \pi \times 10^2 \times \frac{4}{10} = \pi \times 10 \times 4 = 40\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



9

基本問題 立体の表面積・体積

6cm

解き方

側面のおうぎ形は、円の $\frac{216^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{5}$ にあたる。

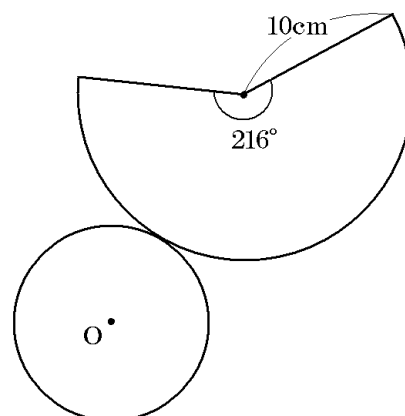
これは、側面の円の半径(母線)と底面の円の半径の比に等しいから、底面Oの半径は、

$$10 \times \frac{3}{5} = 6 \text{ (cm)}$$

別 解

$$\text{底面の円周} = 2\pi \times 10 \times \frac{3}{5} = 12\pi \text{ (cm)}$$

これは「底面の直径 $\times \pi$ 」に等しいから、半径は 6 cm。



10

基本問題 立体の表面積・体積

8cm

解き方

底面積が $9\pi \text{ cm}^2$ だから、底面の円の半径は 3 cm。

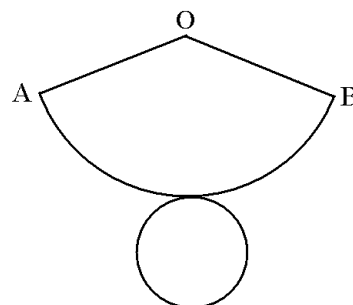
側面のおうぎ形は、円の $\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{8}$ にあたる。

これは、 $\frac{\text{底面の半径}}{\text{母線の長さOA}} = \frac{3}{\text{母線の長さOA}}$ に等しいから、
 $OA = 8 \text{ (cm)}$ である。

別 解

半径OAcmの円の円周の $\frac{3}{8}$ ($\widehat{AB}$ の長さ)が底面の円周になるから、

$$2\pi \times OA \times \frac{3}{8} = 2\pi \times 3 \quad \frac{3}{8} OA = 3 \quad OA = 8 \text{ (cm)}$$



11

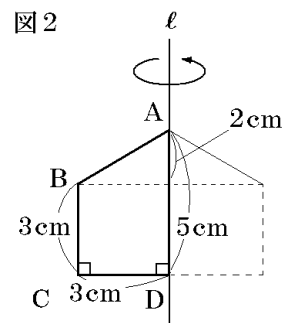
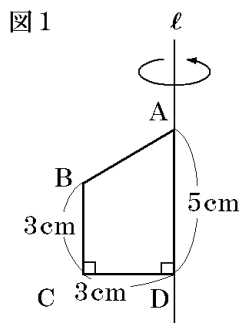
基礎チェック 1 回転体の体積

(1) できる回転体は、丸いテント

のような形で、

底面の半径が cm、高さが cm の円柱と、底面の半径が cm、高さが cm の円錐を組み合わせ

せたものである。

(2) $27\pi\text{ cm}^3$ (3) $6\pi\text{ cm}^3$ (4) $33\pi\text{ cm}^3$

解き方

(2) 円柱部分の体積 = 底面積 $\times$ 高さ $= \pi \times 3^2 \times 3 = 27\pi\text{ (cm}^3\text{)}$ (3) 円錐部分の体積 = 底面積 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{3} = \pi \times 3^2 \times 2 \times \frac{1}{3} = 6\pi\text{ (cm}^3\text{)}$ (4) この回転体の体積 = 円柱部分の体積 + 円錐部分の体積
 $= 27\pi + 6\pi = 33\pi\text{ (cm}^3\text{)}$

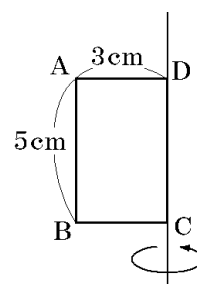
12

基本問題 回転体の体積

 $45\pi\text{ cm}^3$

解き方

底面の半径が 3 cm、高さが 5 cm の円柱だから、

体積 = 底面積 $\times$ 高さ $= \pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi\text{ (cm}^3\text{)}$ 

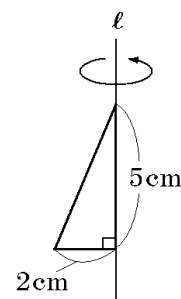
13

基本問題 回転体の体積

 $\frac{20}{3}\pi\text{ cm}^3$

解き方

底面の半径が 2 cm、高さが 5 cm の円錐になるから、

体積 = 底面積 $\times$ 高さ $\times \frac{1}{3} = \pi \times 2^2 \times 5 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}\pi\text{ (cm}^3\text{)}$ 

14

基本問題 回転体の体積

$$42\pi \text{ cm}^3$$

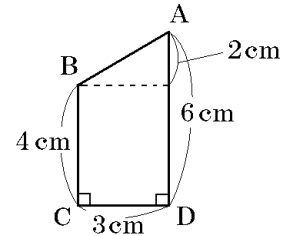
解き方

下側の部分は、底面の半径が3 cm、高さ4 cmの円柱、
上側の部分が、底面の半径が3 cm、高さが2 cmの円錐に
なる。

$$\text{円柱部分の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{円錐部分の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 3^2 \times 2 \times \frac{1}{3} = 6\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{この回転体の体積} &= \text{円柱部分の体積} + \text{円錐部分の体積} \\ &= 36\pi + 6\pi = 42\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



15

基本問題 回転体の体積

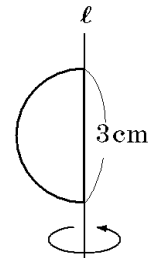
$$\frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3$$

解き方

半径が $\frac{3}{2}$ cmの球になるから、体積は、

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{27}{8} = \frac{9}{2}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{半径 } r \text{ の球の体積は } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



16

基本問題 回転体の体積

$$75\pi \text{ cm}^3$$

解き方

辺ABを軸として1回転させると、上下に2つの円錐ができる。

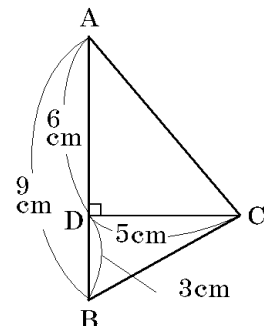
上側の円錐の体積

$$= \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 5^2 \times 6 \times \frac{1}{3} = 50\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

下側の円錐の体積

$$= \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 5^2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 25\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{この回転体の体積} &= \text{上側の円錐の体積} + \text{下側の円錐の体積} \\ &= 50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



17

基本問題 回転体の体積

3 : 1

解き方

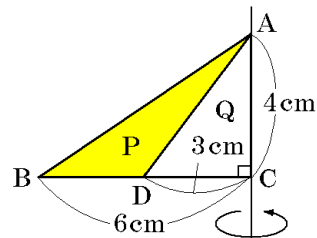
立体Qの体積(△ADCの回転体)

$$= \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{3} = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

立体Pの体積

= △ABCの回転体 - 立体Qの体積

$$= \pi \times 6^2 \times 4 \times \frac{1}{3} - 12\pi = 48\pi - 12\pi = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

したがって、立体Pの体積 : 立体Qの体積 = $36\pi : 12\pi = 3 : 1$ 

10 立体の表面積と体積

解 答

1

補充問題 立体の表面積・体積

36cm^3

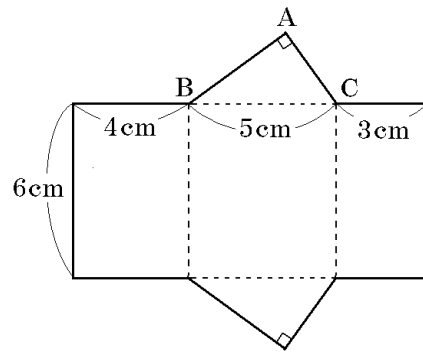
解き方

$AB=4\text{cm}$, $AC=3\text{cm}$ だから ,

体積 = 底面積(三角形) × 高さ

$$= 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 6 = 36 (\text{cm}^3)$$

三角形の面積では , $\times \frac{1}{2}$ を忘れやすいので注意する。



2

補充問題 立体の表面積・体積

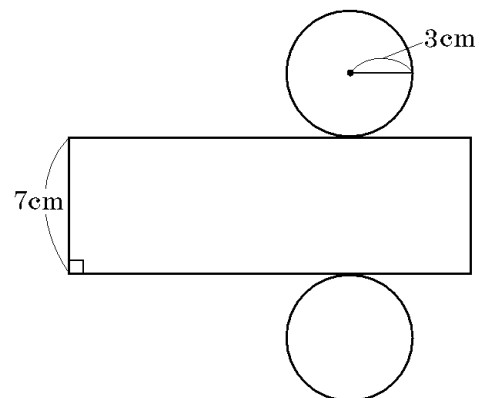
$42\pi\text{cm}^2$

解き方

側面の長方形の横の長さは , 底面の円周だから ,

$$2\pi \times 3 = 6\pi (\text{cm})$$

側面積 = $6\pi \times 7 = 42\pi (\text{cm}^2)$



3

補充問題 立体の表面積・体積

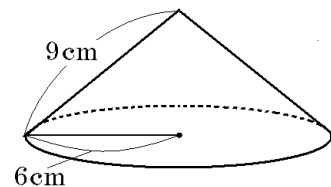
(1) 240° (2) $54\pi\text{cm}^2$

解き方

(1) この円錐の展開図での側面のおうぎ形の中心角は ,

$$\text{半径}9\text{cmの円の} \frac{\text{半径}}{\text{母線の長さ}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ にあたる。}$$

$$\text{したがって中心角は , } 360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ$$



(2) 側面のおうぎ形の面積 = $9 \times 6 \times \pi = 54\pi (\text{cm}^2)$

解 説

- (1) 展開図での側面のおうぎ形の
弧の長さは、底面の円周に等しい
から、 $2\pi \times 6(\text{cm})$
半径9cmの円周が $2\pi \times 9(\text{cm})$
だから、側面のおうぎ形は、円の
 $\frac{2\pi \times 6}{2\pi \times 9} = \frac{6}{9}$ にあたる。

- (2) 円錐の側面積

$$= \pi \times 9^2 \times \frac{6}{9} = \pi \times 9 \times 6 = 54\pi (\text{cm}^2)$$

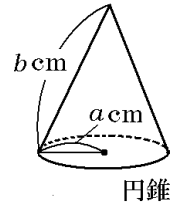
裏ワザ

側面のおうぎ形は、円の $\frac{a}{b}$ にあたる。

$$\text{おうぎ形の中心角} = 360^\circ \times \frac{a}{b}$$

$$\text{おうぎ形の面積(側面積)} = \pi \times ab$$

$b \times a$ に π をつければ側面積になる。



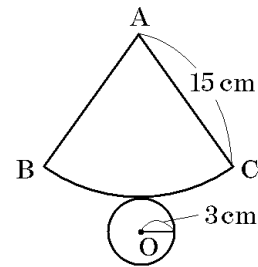
円錐

4**補充問題** 立体の表面積・体積

72°

解き方

この円錐の展開図での側面のおうぎ形の中心角は、
半径15cmの円の $\frac{\text{半径}}{\text{母線の長さ}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ にあたる。
したがって中心角 $\angle BAC$ は、 $360^\circ \times \frac{1}{5} = 72^\circ$

**解 説**

- (1) 展開図での側面のおうぎ形の
弧の長さは、底面の円周に等しい
から、 $2\pi \times 3(\text{cm})$
半径15cmの円周が $2\pi \times 15(\text{cm})$
だから、側面のおうぎ形は、円の
 $\frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 15} = \frac{3}{15}$ にあたる。

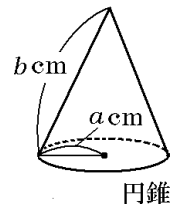
裏ワザ

側面のおうぎ形は、円の $\frac{a}{b}$ にあたる。

$$\text{おうぎ形の中心角} = 360^\circ \times \frac{a}{b}$$

$$\text{おうぎ形の面積(側面積)} = \pi \times ab$$

$b \times a$ に π をつければ側面積になる。



円錐

5

補充問題 立体の表面積・体積

4cm

解き方

側面のおうぎ形は、円の $\frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}$ にあたる。

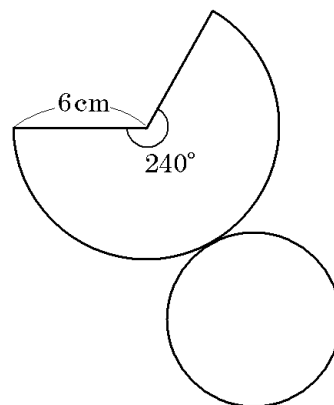
これは、側面の円の半径(母線)と底面の円の半径の比に等しいから、底面の半径は、

$$6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{ (cm)}$$

別 解

$$\text{底面の円周} = 2\pi \times 6 \times \frac{2}{3} = 8\pi \text{ (cm)}$$

これは「底面の直径 $\times \pi$ 」に等しいから、半径は 4 cm。



6

補充問題 立体の表面積・体積

$$\frac{9}{4} \pi \text{ cm}^2$$

解き方

側面の展開図でのおうぎ形は、円の $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ にあたる。

これは、側面の円の半径(母線)と底面の円の半径の比に等しいから、底面の半径は、

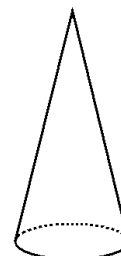
$$6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{したがって、底面積は、} \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

解 説

$$\text{底面の円周} = 2\pi \times 6 \times \frac{1}{4} = 3\pi \text{ (cm)}$$

これは「底面の直径 $\times \pi$ 」に等しいから、半径は $\frac{3}{2}$ cm。



7

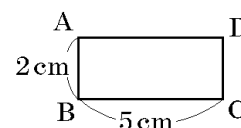
補充問題 回転体の体積

$$50\pi \text{ cm}^3$$

解き方

底面の半径が 5 cm、高さが 2 cm の円柱だから、

$$\text{体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} = \pi \times 5^2 \times 2 = 50\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



8

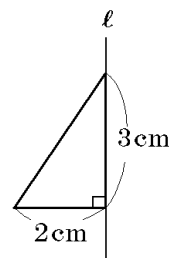
補充問題 回転体の体積

$$4\pi \text{ cm}^3$$

解き方

底面の半径が 2 cm , 高さが 3 cm の円錐になるから ,

$$\text{体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 2^2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



9

補充問題 回転体の体積

$$24\pi \text{ cm}^3$$

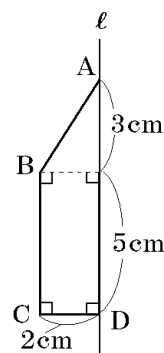
解き方

下側の部分は , 底面の半径が 2 cm , 高さ 5 cm の円柱 ,
上側の部分が , 底面の半径が 2 cm , 高さが 3 cm の円錐に
なる。

$$\text{円柱部分の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{円錐部分の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 2^2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\begin{aligned} \text{この回転体の体積} &= \text{円柱部分の体積} + \text{円錐部分の体積} \\ &= 20\pi + 4\pi = 24\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



10

補充問題 回転体の体積

$$24\pi \text{ cm}^3$$

解き方

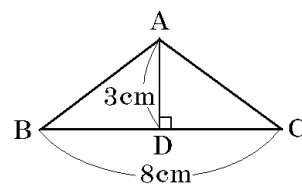
辺 BC を軸として 1 回転させると , 左右に同じ形の円錐ができる。

1 つの円錐は , 底面の半径が 3 cm , 高さが 4 cm だから ,

1 つの円錐の体積

$$= \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \pi \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{3} = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{この回転体の体積} = 12\pi \times 2 = 24\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



11

補充問題 回転体の体積

$$125\pi\text{ cm}^3$$

解き方

できる立体の体積は、半径 5 cm、高さ 6 cm の円柱から、半径 5 cm、高さ 3 cm の逆さまの円錐をくりぬいた形をしている。

$$\begin{aligned} & \text{立体の体積} \\ &= \text{円柱の体積} - \text{円錐の体積} \\ &= \pi \times 5^2 \times 6 - \pi \times 5^2 \times 3 \times \frac{1}{3} \\ &= 150\pi - 25\pi \\ &= 125\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

