

# 24 空間図形(1)－最短距離－

## 解 答

1

### 実戦例題 空間図形(1)－最短距離－

答えは本文にあります。

2

### 実戦問題 空間図形(1)－最短距離－

(1)  $60^\circ$     (2)① ウ    ② 6cm    (3)  $6\sqrt{3}$  cm

#### 解き方

(1) おうぎ形の弧の長さは、底面の円の円周に等しい。

$$2\pi \times 1 = 2\pi \text{ (cm)}$$

側面のおうぎ形は、半径 6 cm の円の円周は、 $2\pi \times 6 = 12\pi$  (cm) だから、

側面のおうぎ形は、半径 6 cm の円の  $\frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$  にあたる。

したがって、おうぎ形の中心角は、 $360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ$

(2)① 糸の長さが最も短くなるのは、展開図で糸が直線になるときである。ウが正しい。

② ウの図で  $\triangle PAA'$  は正三角形になるから、 $AA' = PA = 6$  (cm)

(3) 糸を 2 周巻きつけているとき、糸の長さが最も短くなるのは、2 周分の展開図を考えたときの直線になる。右図の  $AA''$  である。

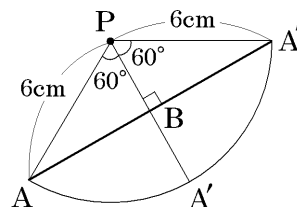
$\triangle PAB$  は  $60^\circ$  の角をもつ直角三角形であるから、

$$AP : AB = 2 : \sqrt{3}$$

$$2AB = AP \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$AB = 3\sqrt{3}$$

したがって、 $AA'' = 2AB = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$  (cm)



3

**実戦問題 空間図形(1)－最短距離－**

(1) 体積： $\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi\text{ cm}^3$     表面積： $12\pi\text{ cm}^2$     (2)  $4\sqrt{2}\text{ cm}$

**解き方**

(1) 右の図で、円錐の高さOHは、三平方の定理より、

$$\sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

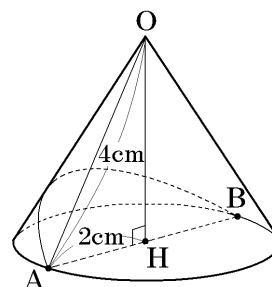
したがって体積は、

$$\pi \times 2^2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\Rightarrow \text{円錐の体積 } V = \pi r^2 \times h \times \frac{1}{3}$$

おうぎ形の中心角は、 $360^\circ \times \frac{2\pi \times 2}{2\pi \times 4} = 180^\circ$

したがって表面積は、 $\pi \times 4^2 \times \frac{1}{2} + \pi \times 2^2 = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}$      $\Rightarrow$ 側面積+底面積



**裏ワザ**

$\Rightarrow$ 円錐の側面積は、

右の裏ワザで求めてもよい。

$$\pi \times 2 \times 4 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$\Rightarrow$ 側面のおうぎ形の中心角は、

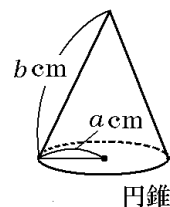
$$360^\circ \times \frac{2}{4} = 180^\circ$$

側面のおうぎ形は、円の  $\frac{a}{b}$  にあたる。

$$\text{おうぎ形の中心角} = 360^\circ \times \frac{a}{b}$$

$$\text{おうぎ形の面積(側面積)} = \pi \times ab$$

$\Rightarrow b \times a$  に  $\pi$  をつければ側面積になる。



(2) 側面の展開図は、半径4cmの半円になる。

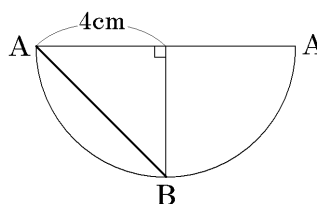
右の図のように、直角三角形の斜辺の長さが、ABの最短の長さになる。

三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow$ 直角二等辺三角形になるから、

辺の比  $1 : 1 : \sqrt{2}$  から求めてもよい。



4

# 実戦問題 空間図形(1)－最短距離－

$$4\sqrt{5} \text{ cm}$$

## 解き方

AL=AE=5cm より,

$$LD=AD-AL=8-5=3(\text{cm})$$

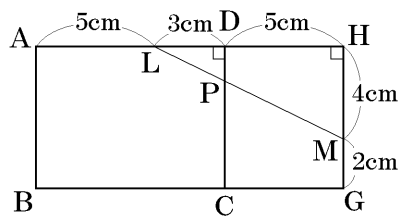
また, GH=3GMより,

$$GM=GH \div 3=6 \div 3=2(\text{cm})$$

よって, MH=GH-GM=6-2=4(cm)

L P, PMをふくむ面の展開図は, 右のようになる。LP+PMが最も短くなるのは直線になる  
ときだから,  $\triangle LMH$ で三平方の定理より,

$$LP+PM=LM=\sqrt{LH^2+MH^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}(\text{cm})$$



5

# 実戦問題 空間図形(1)－最短距離－

$$(1) \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 \quad (2) \sqrt{5} \text{ cm} \quad (3) 2 \text{ cm}^2 \quad (4) \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

## 解き方

$$(1) 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\text{cm}^3) \quad \Rightarrow \text{円錐の体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

(2) 点Oから底面ABCDに垂線OHをひくと, 点Hは対角線AC, BDの交点で,  
 $\triangle ABH$ は,  $\angle AHB=90^\circ$ の直角二等辺三角形だから,

$$AH:AB=1:\sqrt{2}$$

$$AH:2=1:\sqrt{2} \quad AH=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(\text{cm})$$

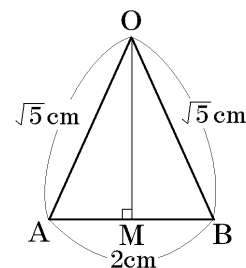
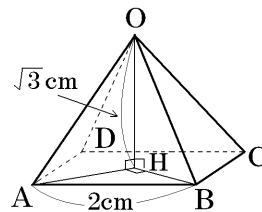
また,  $\angle OHA=90^\circ$ だから,  $\triangle OAH$ で, 三平方の定理より,

$$OA=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}(\text{cm})$$

(3)  $\triangle OAB$ は,  $OA=OB=\sqrt{5}(\text{cm})$ の二等辺三角形で,  
点Oから辺ABに垂線OMをひく。AM=1(cm)より,  
 $\triangle OAM$ で, 三平方の定理より,

$$OM=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2(\text{cm})$$

$$\text{したがって, } \triangle OAB=2 \times 2 \times \frac{1}{2}=2(\text{cm}^2)$$



- (4) AP, PCがふくまれる部分の展開図は右のようになる。

AP+PC が最小となるのは, ACが直線になるときで,  
ACとOBの交点をPとする。

$$\triangle OAB \equiv \triangle OBC \text{ より, } AB=BC, AC \perp BP$$

$\triangle OAM$ と $\triangle ABP$ で,

$$\angle OAM = \angle ABP, \angle OMA = \angle APB = 90^\circ$$

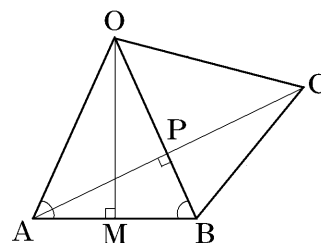
2組の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle OAM \sim \triangle ABP$$

よって,  $OA : AB = OM : AP$

$$\sqrt{5} : 2 = 2 : AP \quad AP = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$$\text{したがって, } AP + PC = 2AP = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times 2 = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$



**6**

### 実戦問題 空間図形(1)－最短距離－

(1)  $16\text{cm}^3$     (2)  $2\sqrt{2}\text{ cm}$     (3) ①  $(4+2\sqrt{2})\text{ cm}$     ②  $6\sqrt{2}\text{ cm}$

### 解き方

(1)  $2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ (cm}^3\text{)}$

(2) 1辺の長さを  $a\text{ cm}$  ( $a > 0$ ) とすると,

$$a^2 \times 2 = 16 \quad a^2 = 8 \quad a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

(3) ①  $IA = EJ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$

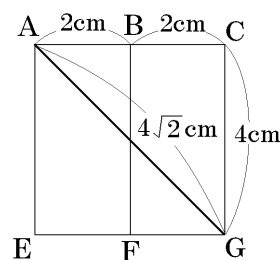
よって,

$$IA + AP(AE) + PJ(EJ) = \sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} = (4 + 2\sqrt{2}) \text{ (cm)}$$

② AG間の最短距離は右図のようになる。

よって,

$$\begin{aligned} & IA + AP(AG) + PJ(GJ) \\ &= \sqrt{2} + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



# 24 空間図形(1)－最短距離－

## 解 答

1

### 補充問題 空間図形(1)－最短距離－

$3\sqrt{5}$  cm

#### 解き方

求める糸の長さは、展開図で直線になる。

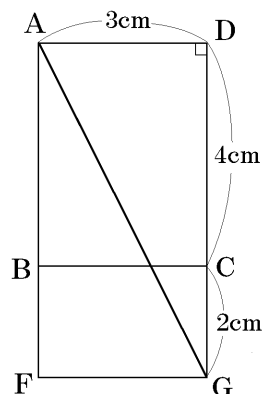
右の図は、糸がかかっている面の展開図であり、AGが求める長さである。

△ADGで、三平方の定理より、

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

よって、

$$AG = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$$



2

### 補充問題 空間図形(1)－最短距離－

(1)  $3\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>      (2)  $\sqrt{19}$  cm

#### 解き方

(1) △ABCを底面とすると、高さはDBになる。

△DABで、三平方の定理より、

$$BD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{求める体積は、} \left( 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \right) \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

(2) 右の図は、糸がかかっている側面の展開図である。

EからACに垂線をひき、EHとする。

△DABは、AD : AB = 2 : 1であるから、∠A = 60° の直角三角形である。

よって、△EAHで、AH = 1 (cm)、EH =  $\sqrt{3}$  (cm) となる。

求める長さはECであるから、

△EHCで、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} EC &= \sqrt{EH^2 + HC^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3 + 2 - 1)^2} = \sqrt{19} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

