高校受験数学　基礎編

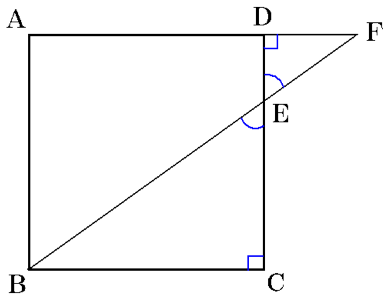
20 図形と相似　　　解　答

1

基礎チェック１　三角形の相似

(1)

(証明)
△EBCと△EFDで，
四角形ABCDは正方形だから，
　∠BCE＝∠ FDE ＝90°　…①
対頂角は等しいから，
　∠BEC＝∠ FED 　…②
①，②より， ２組の角 がそれぞれ等しいので，
　△EBC∽△EFD



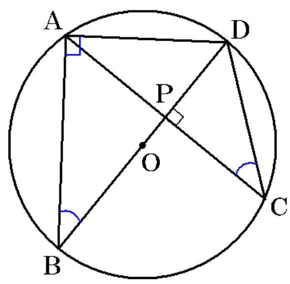
(2)　１cm

解き方

(2)　△EBCと△EFDの相似比は３：１だから，BC＝３cmより，
　３：DF＝３：１
したがって，DF＝１(cm)

基礎チェック２　三角形の相似

(証明)
△ABDと△PCDで，
仮定より，線分BDは円Oの直径だから，
　∠BAD＝ ア　90 °　…①
また，仮定より，AC⊥BDだから，
　∠CPD＝ ア　90 °　…②
①，②より，　∠BAD＝∠ イ　CPD 　…③
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角は等しいから，
　∠ABD＝∠ ウ　PCD 　…④
③，④より， エ　２組の角 がそれぞれ等しいので，
　△ABD∽△PCD



解き方

円では，円周角が等しい，直径をつくる弧に対する円周角が90°であるなど，角の条件がつくりやすいので，相似な図形ができやすい。

2

基本問題　三角形の相似

(証明)

△ABCと△AEDで,

仮定より，線分ACは円Oの直径だから,

　　∠ABC＝90°　…①

また，仮定より，AE⊥BDだから,

　　∠AED＝90°　…②

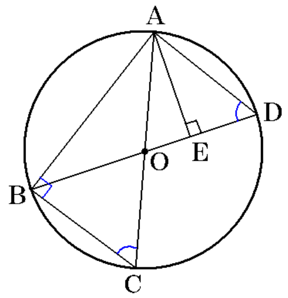
①，②より，　∠ABC＝∠AED　　…③

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから,

　　∠ACB＝∠ADE　　…④

③，④より，２組の角がそれぞれ等しいので,

　　△ABC∽△AED



解き方

　基礎チェック２と同じ考え方をする問題。円では，円周角が等しい，直径をつくる弧に対する円周角が90°であるなど，角の条件がつくりやすいので，相似な図形ができやすい。

3

基本問題　三角形の相似

(証明)

△ABCと△EDCで,

仮定より，　∠BCA＝∠ ア　DCE 　　…①

また，BA＝BEより，△BEAは二等辺三角形だから,

　　∠BAE＝∠ イ　BEA 　　…②

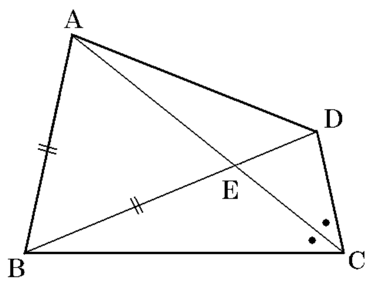
対頂角は等しいから,

　　∠BEA＝∠ ウ　CED 　　…③

②，③より，　∠CAB＝∠ ウ　CED 　　…④

①，④より， エ　　２組の角 がそれぞれ等しいので,

　　△ABC∽△EDC



解き方

　合同の証明と同じで，対応の順に注意しよう。証明する三角形があたえられているときは，迷ったら右のように考えよう。

△ABC
↕↕↕
△EDC

AとE
BとD
CとC
が対応。

4

基本問題　三角形の相似

$x=\dfrac{8}{3}$

解き方

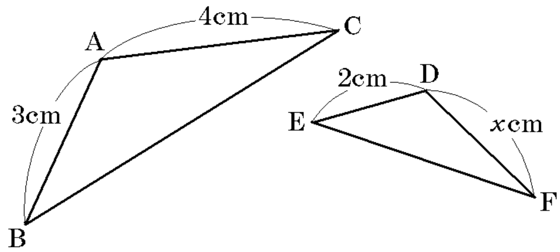
△ABC∽△DEF

相似な図形では，対応する辺の比が等しいから，

AB：DE＝AC：DFより，

3：2＝4：x

$3x=8$　　$x=\dfrac{8}{3}$ (cm)



5

基本問題　三角形の相似

(証明)

△ACDと△ADPで，

共通な角だから，　∠CAD＝∠DAP　…①

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから，

∠ACD＝∠ABD　…②

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから，

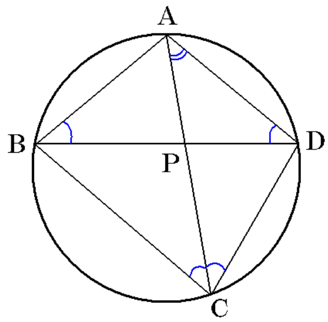
∠ADP＝∠BCA　…③

∠ABD＝∠BCAであるから，②，③より，

∠ACD＝∠ADP　…④

①，④より，２組の角がそれぞれ等しいので，

△ACD∽△ADP



(2)　$\sqrt{78}$ cm

解き方

(1)　$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角と，$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角を考える。

(2)　△ACD∽△ADP

AC＝AP＋PC＝6＋7＝13(cm)

ADは２つの三角形の辺になっていることに注意して比をつくる。

AC：AD＝AD：APより，

13：AD＝AD：6

$AD^2=78$　　AD＞０より，AD＝$\sqrt{78}$ (cm)

△ACD　AとA
↕↕↕　CとD
△ADP　DとP
が対応。

6

基本問題　三角形の相似

5 cm

解き方

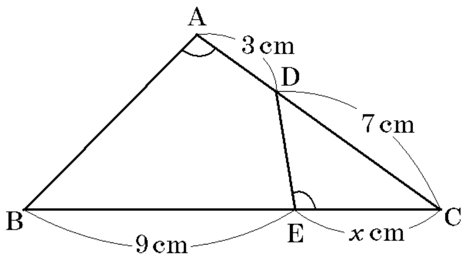
△ABCと△EDCで，

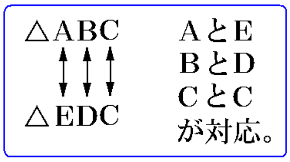
仮定より，∠BAD＝∠CED

共通な角だから，∠ACB＝∠ECD

２組の角がそれぞれ等しいから，

△ABC∽△EDC





ECを x とおくと，BC：DC＝AC：ECより，

$(9+x):7=(3+7):x$

$x(9+x)=7(3+7)$

$x^2+9x-70=0$　　⇒展開して整理する。

$(x-5)(x+14)=0$

$x=5,\ -14$

$x=-14$ は，問題に適さない。したがって，EC＝5(cm)である。

7

基本問題　三角形の相似

(1)

(証明)

△ABEと△ECHで，

∠ABE＝∠$\boxed{\text{ア　ECH}}$＝90°　…①

△ABEで，∠BAE＋∠AEB＝90° より，

∠BAE＝90° －∠$\boxed{\text{イ　AEB}}$　…②

また，

∠AEB＋∠CEH＝180° －90° ＝90° より，

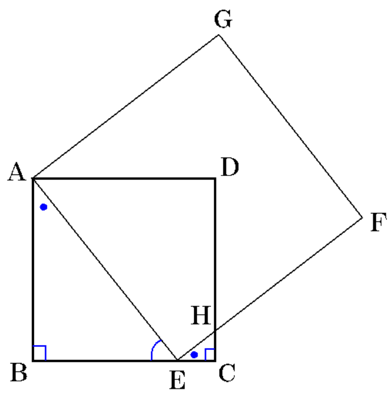
∠CEH＝90° －∠$\boxed{\text{イ　AEB}}$　…③

②，③より，

∠BAE＝∠$\boxed{\text{ウ　CEH}}$　…④

①，④より，$\boxed{\text{エ　２組の角}}$がそれぞれ等しいので，

△ABE∽△ECH



(2)　$\dfrac{21}{5}$ cm (4.2cm)

解き方

(2)　まず，CHの長さを求める。

AB：EC＝BE：CHより，　5：(5−4)＝4：CH　5CH＝4　CH＝$\dfrac{4}{5}$

したがって，　DH＝DC−CH＝$5-\dfrac{4}{5}=\dfrac{25}{5}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{21}{5}$ (cm)

8

基礎チェック１　平行線と線分の比

(1)　15cm　　(2)　$x=4$

解き方

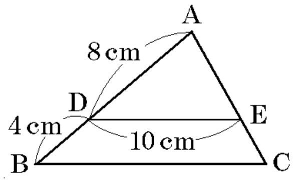
(1)　右の図で，DE // BCであるとき，△ADE∽△ABC

AD：AB＝DE：BC　より，

$8:(8+4)=10:BC$　　⇒8:4ではない！

$8BC=12\times10$

$8BC=120$　　$BC=15$(cm)

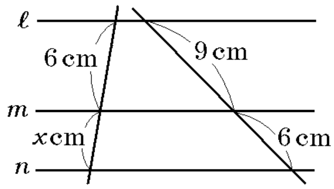


(2)　右の図のように，直線 ℓ, m, n がそれぞれ平行であるとき，

$6:x=9:6$

$9x=6\times6$

$9x=36$　　$x=4$ (cm)



基礎チェック２　中点連結の定理

(1)　9cm　　(2)　12cm

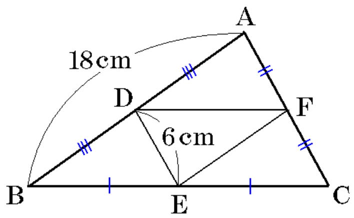
解き方

(1)　中点連結定理より，EF // BA，$EF=\dfrac{1}{2}BA$

したがって，$EF=18\times\dfrac{1}{2}=9$(cm)

(2)　中点連結定理より，DE // AC，$DE=\dfrac{1}{2}AC$

したがって，$AC=6\times2=12$(cm)



9

基本問題　平行線と線分の比

$\dfrac{3}{4}$cm (0.75cm)

解き方

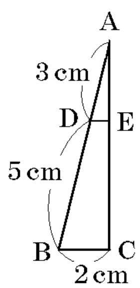
右の図で，DE // BCであるとき，△ADE∽△ABC

AD：AB＝DE：BC　より，

$3:(3+5)=DE:2$

$8\times DE=3\times2$

$8DE=6$　　$DE=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$ (cm)



10

基本問題　平行線と線分の比

(1)　$x=21$　　(2)　$x=5$

解き方

(1)　12：(30－12)＝14：x

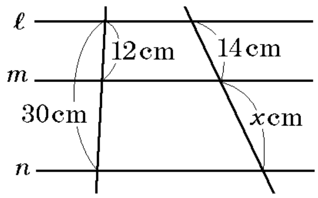
$12x=18\times14$　　$12x=18\times14$　　$x=\dfrac{18\times14}{12}=21$(cm)

(2)　ℓ を m と交わらないように平行移動すると，(1)と同じ考え方でできる。

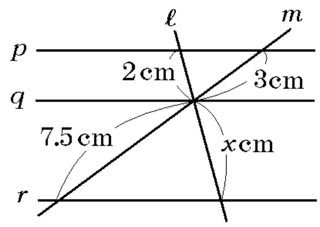
3：7.5＝2：x

$3x=7.5\times2$　　$3x=15$　　$x=5$(cm)

(1)



(2)



11

基本問題　平行線と線分の比

$x=4$cm　　$y=15$cm

解き方

① 右の図で，上２つの三角形の相似から考える。

3：6＝2：x

$3x=6\times2$

$3x=12$　　$x=4$(cm)

② 右の図で，下２つの三角形の相似から考える。

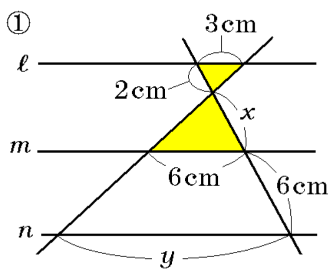
x：$x+6=6$：y

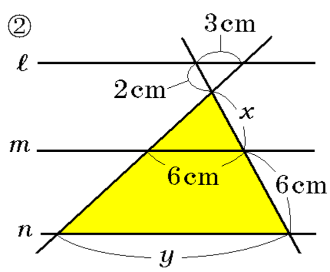
4：4＋6＝6：y

4：10＝6：y

$4y=60$　　$y=15$(cm)

x：6ではないので注意！





12

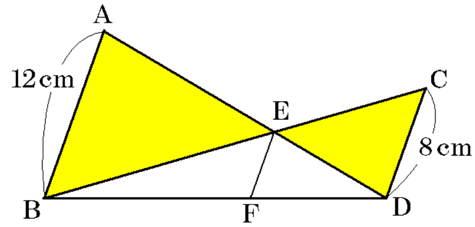
基本問題　平行線と線分の比

(1)　3：2　　(2)　3：2　　(3)　$\frac{24}{5}$ cm(4.8 cm)

解き方

(1)　△EAB∽△EDC　　⇒平行線の錯角，対頂角が等しい。

相似比＝12：8＝3：2



(2)　対応する辺の比は相似比に等しいから，

BE：EC＝3：2

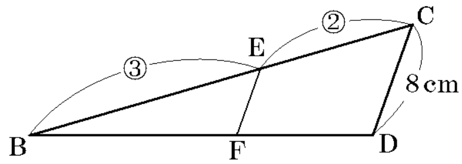
(3)　△BDC に注目すると，EF // CDより，

△BFE∽△BDC

したがって，BE：BC＝EF：CDより，

3：(3＋2)＝EF：8

5 EF＝24　　EF＝$\frac{24}{5}$ (cm)



13

基本問題　平行線と線分の比

$\frac{30}{7}$ cm

解き方

△PAB∽△PDC で，相似比＝6：15＝2：5

よって，BP：PC＝2：5

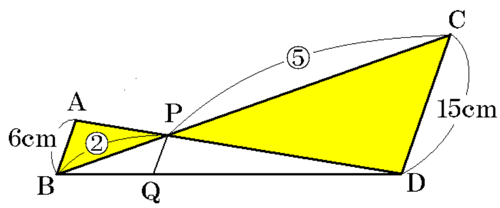
△BDC に注目すると，PQ // CDより，

△BQP∽△BDC

したがって，BP：BC＝PQ：CDより，

2：(2＋5)＝PQ：15

7 PQ＝30　　PQ＝$\frac{30}{7}$ (cm)



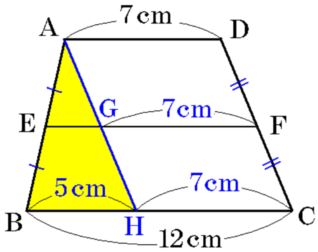
14

基本問題 **中点連結定理**

$\frac{19}{2}$ cm（9.5cm）

解き方

Aを通り，DCに平行な直線をひき，EFとの交点をG，BCとの交点をHとする。



AE：EB＝DF：FCより，AD∥EF∥BC

四角形AGFD，AHCDは平行四辺形だから，

GF＝HC＝7（cm）

また，　BH＝BC－HC＝12－7＝5（cm）

△ABHで，AE＝EB，AG＝GH だから，中点連結定理より，

$$EG=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{2}\ (\text{cm})$$

したがって，$EF=EG+GF=\frac{5}{2}+7=\frac{5}{2}+\frac{14}{2}=\frac{19}{2}\ (\text{cm})$

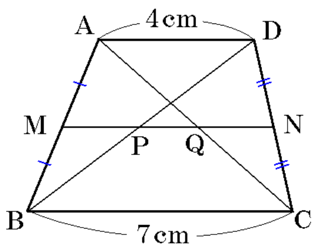
15

基本問題 **中点連結定理**

$\frac{3}{2}$（1.5）

解き方

AM：MB＝DN：NCより，AD∥MN∥BC



△ABCで，中点連結定理より，

$$MQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times7=\frac{7}{2}\ (\text{cm})$$

△CDAで，中点連結定理より，

$$QN=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times4=2\ (\text{cm})$$

よって，$MN=MQ+QN=\frac{7}{2}+2=\frac{7}{2}+\frac{4}{2}=\frac{11}{2}\ (\text{cm})$

また，△BDAで，中点連結定理より，

$$MP=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times4=2\ (\text{cm})$$

したがって，$PQ=MN-(MP+QN)=\frac{11}{2}-(2+2)=\frac{11}{2}-\frac{8}{2}=\frac{3}{2}\ (\text{cm})$

16

基本問題　**中点連結定理**

$\frac{9}{2}$ cm (4.5cm)

解き方

仮定より，BA＝AD，BE＝EF＝FC

よって，AE // DF

△BFDで，中点連結定理より，

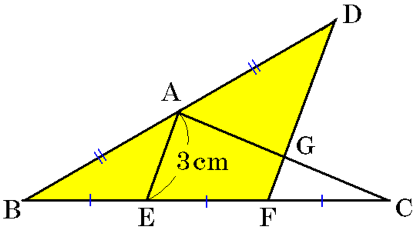
$$DF=2AE=2\times3=6\,(cm)$$

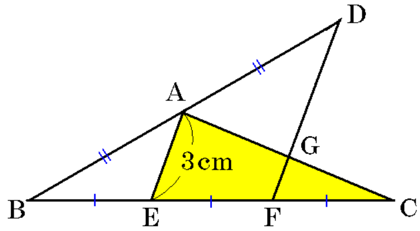
△CAEで，中点連結定理より，

$$GF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}\,(cm)\,(1.5cm)$$

したがって，

$$DG=DF-GF$$
$$=6-\frac{3}{2}=\frac{12}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\,(cm)\,(4.5cm)$$





17

基本問題　**中点連結定理**

$\frac{3}{2}$ (1.5)

解き方

△ABCで，平行線と線分の比の関係より，

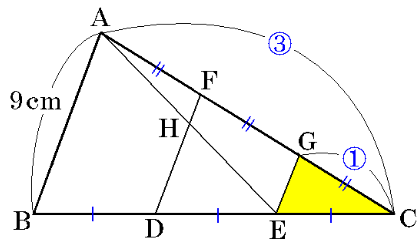
CG：CA＝GE：AB であるから，

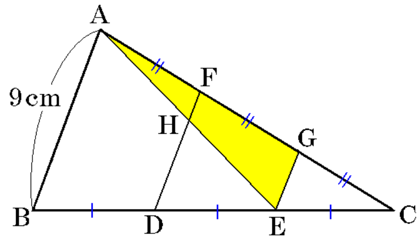
1：3＝GE：9

3GE＝9　　GE＝3 (cm)

△AEGで，中点連結定理より，

$$FH=\frac{1}{2}GE=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}\,(cm)\,(1.5cm)$$





別　解

△ABCで，平行線と線分の比の関係より，

CF：CA＝FD：AB であるから，

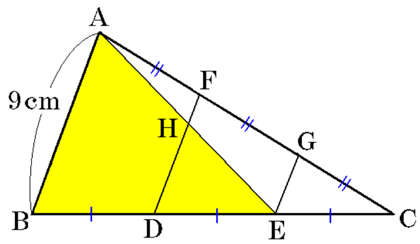
2：3＝FD：9

3FD＝18　　FD＝6 (cm)

△ABEで，中点連結定理より，

$$HD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times9=\frac{9}{2}\,(cm)\,(4.5cm)$$

したがって，$FH=FD-HD=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$ (cm) (1.5cm)



18

基礎チェック１　相似比と面積比・体積比

36π

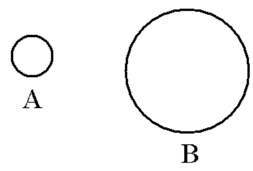
解き方

円Aと円Bの相似比が1：3であるとき，面積比は，$1^2：3^2$ である。したがって，円Bの面積を Scm^{2}とすると，

$4\pi：S=1^2：3^2$

$4\pi：S=1：9$

$S=4\pi\times9=36\pi\,(\mathrm{cm}^2)$



基礎チェック２　相似比と面積比・体積比

(1)　4cm^2　　(2)　8cm^3

解き方

(1)　切り口の正方形と底面の正方形は相似で，

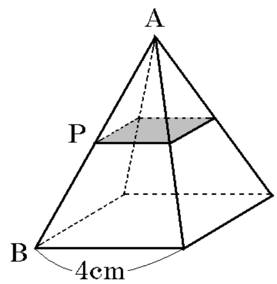
相似比＝１：２　　面積比＝$1^2：2^2$　である。

切り口の面積を Scm^{2}とすると，

$S：4\times4=1^2：2^2$

$S：16=1：4$

$4S=16$　　$S=4\,(\mathrm{cm}^2)$



(2)　切りとった小さな正四角錐ともとの正四角錐は相似で，

相似比＝１：２　　体積比＝$1^3：2^3$　である。

切りとった小さな正四角錐の体積を Vcm^{3}とすると，

$V：64=1^3：2^3$

$V：64=1：8$

$8V=64$　　$V=8\,(\mathrm{cm}^3)$

19

基本問題　相似比と面積比・体積比

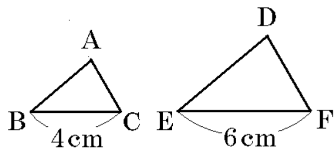
(1)　4：9　　(2)　18cm^2

解き方

(1)　△ABC∽△DEF

相似比は，4：6＝2：3

したがって，面積比は，$2^2：3^2=4：9$



(2)　△ABCと△DEFの相似比が2：3であるから，面積比は，$2^2：3^2=4：9$

△DEFの面積を Scm^{2}とすると，

$8：S=4：9$

$4S=72$　　$S=18\,(\mathrm{cm}^2)$

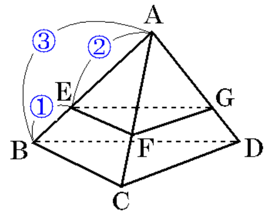
20

基本問題　相似比と面積比・体積比

8：27

解き方

AE：EB＝AF：FC＝AG：GD＝2：1 であるから，
三角錐AEFGと三角錐ABCDの相似比＝AE：AB＝2：3
したがって，
三角錐AEFGと三角錐ABCDの体積比は，$2^3：3^3$＝8：27



20

基本問題　相似比と面積比・体積比

12倍

解き方

円柱Aの半径を$2r$cm，円錐Bの半径を $r$cm，等しい高さを $h$cm とすると，
円柱Aの体積＝$\pi \times (2r)^2 \times h = 4\pi r^2 h$ (cm)
円錐Bの体積＝$\pi \times r^2 \times h \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (cm)
したがって，Aの体積はBの体積の，　$4 \div \dfrac{1}{3} = 4 \times 3 = 12$(倍)