高校受験数学　基礎編
20 図形と相似

1

まとめ　三角形の相似

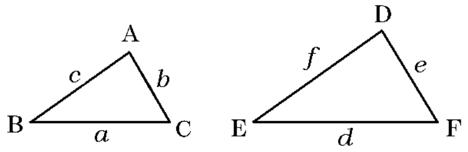
●三角形の相似条件…２つの図形で，一方を拡大・縮小すると他方の図形と合同になるとき，２つの図形は相似である。

① **３組の辺の比が，すべて等しい。**

⇒$a：d＝b：e＝c：f$

△ABC∽△DEF

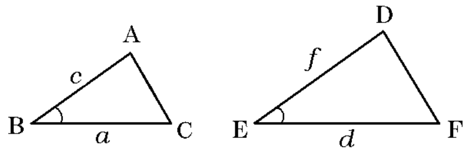
相似の記号は「∽」



② **２組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しい。**

⇒$a：d＝c：f$，∠B＝∠E

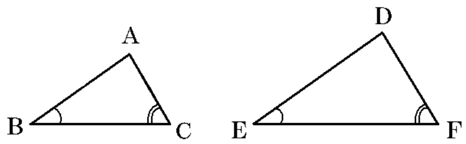
△ABC∽△DEF



③ **２組の角が，それぞれ等しい。**

⇒∠B＝∠E，∠C＝∠F

△ABC∽△DEF



⇒三角形の相似条件は，三角形の合同条件で，**辺の比が等しい**と考えるとよい。

③では，「１辺とその両端の角がそれぞれ等しい」で，辺の長さを考えないから２角だけの条件になる。

●相似の証明…仮定(あたえられた条件)から結論を導くこと。

⇒三角形の相似の証明では，相似条件にあてはまることを示す。

⇒仮定では，いろいろな図形の性質を使うことができる。

合同の証明と同じだね。

(例)

対頂角は等しい。平行線の錯角・同位角は等しい。三角形の内角の和は180°である。
三角形の外角は，それととなり合わない２角の和に等しい。
二等辺三角形は２辺が等しい三角形で，底角は等しい。
同じ弧に対する円周角は等しい。直径に対する弧の円周角は90°である。など。

●相似比と辺の長さ…相似な図形で，対応する線分の長さの比を相似比という。

比の性質　　$a：b＝c：d$　　ならば，　$ad＝bc$

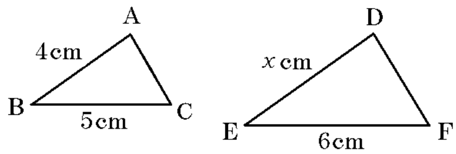
比の性質を利用しよう。

（例）右の図で，△ABC∽△DEFである。

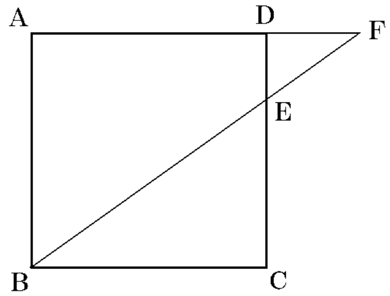
AB：DE＝BC：EFより，

４：x＝５：６

５x＝24　　x＝4．8　　DE＝4．8cm



基礎チェック１　三角形の相似



右の図の正方形ABCDは，１辺の長さが３cmである。DE：EC＝1：3となる点Ｅを辺CD上にとり，BE，ADを延長して交わった点をＦとする。次の問いに答えなさい。(青森改題)

(1)　△EBCと△EFDが相似になることを証明しました。
［　　　］にあてはまる記号や語句を書きなさい。

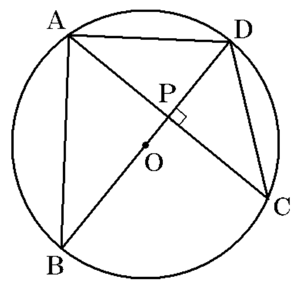
(証明)
△EBCと△EFDで，
四角形ABCDは正方形だから，
　　∠BCE＝∠［　　　］＝90°　…①
対頂角は等しいから，
　　∠BEC＝∠［　　　］　…②
①，②より，［　　　　　］がそれぞれ等しいので，
　　△EBC∽△EFD

証明のしかたの確認です。
簡単にできたね。

(2)　DFの長さを求めなさい。

相似比はいくつかな？
比をつくって計算だね。

基礎チェック２　三角形の相似



右の図のように，円Ｏの周上に点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあり，線分BDは直径である。線分ACと線分BDは垂直に交わっていて，その交点をＰとする。△ABD∽△PCDとなることを証明しました。
［　　　］をうめて証明を完成しなさい。(秋田改題)

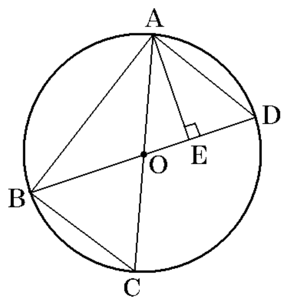
(証明)
△ABDと△PCDで，
仮定より，線分BDは円Ｏの直径だから，
　　∠BAD＝［ア　　　］°　…①
また，仮定より，AC⊥BDだから，
　　∠CPD＝［ア　　　］°　…②
①，②より，　∠BAD＝∠［イ　　　］　…③
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角は等しいから，
　　∠ABD＝∠［ウ　　　］　…④
③，④より，［エ　　　　　］がそれぞれ等しいので，
　　△ABD∽△PCD

円では，円周角が等しい，直径をつくる弧に対する円周角が90°であるなど，角の条件がつくりやすいので，相似な図形ができやすいんだ。

2

基本問題　三角形の相似

　右の図のように，点Oを中心とする円Oの周上に４つの点A，B，C，Dがあり，線分ACはその円の直径である。また，点Aから線分BDに垂線をひき，BDとの交点をEとする。このとき，△ABC∽△AEDとなることを証明しなさい。(沖縄)



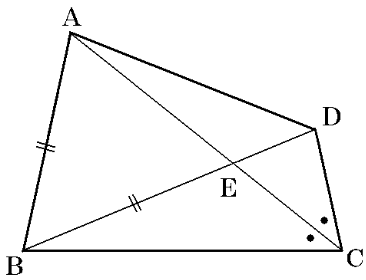
(証明)

基礎チェック２を参照して，証明を書いてみましょう。
相似の証明では，「２組の角」の相似条件が最も多いよ。

3

基本問題　三角形の相似

　右の図の対角線の交点をEとする四角形ABCD において，∠BCA＝∠DCA，BA＝BEならば，△ABC∽△EDCである。□をうめて証明を完成しなさい。(鳥取改題)



(証明)

△ABCと△EDCで，

仮定より，　∠BCA＝∠［ア］　…①

また，BA＝BEより，△BEAは二等辺三角形だから，

　∠BAE＝∠［イ］　…②

対頂角は等しいから，

　∠BEA＝∠［ウ］　…③

②，③より，　∠CAB＝∠［ウ］　…④

①，④より，［エ］がそれぞれ等しいので，

　△ABC∽△EDC

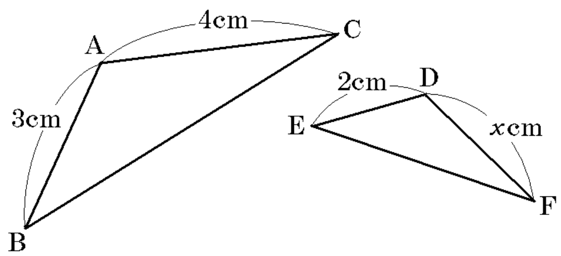
等しい辺や角にしるしをつけたよ。

△ABC∽△EDCだから，AとE，BとD，CとCが対応しているよ。

4

基本問題　三角形の相似

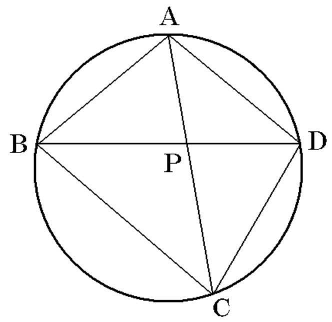
右の図で，△ABC∽△DEFであるとき，xの値を求めなさい。(栃木)



5

基本問題　三角形の相似

右の図のように，四角形ABCDがある。この四角形の頂点はすべて円の周上にあり，点Pは対角線ACと対角線BDの交点である。∠ABD＝∠BCAであるとき，次の問いに答えなさい。(高知)



(1)　△ACD∽△ADPを証明しなさい。

(証明)

等しい角を
かき入れていこう。

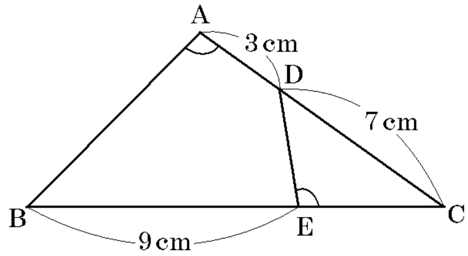
(2)　AP＝6cm，PC＝7cmのとき，辺ADの長さを求めなさい。

相似での，対応する辺を
しっかりとらえよう。

6

基本問題　三角形の相似

　右の図の△ABCで，辺AC，BC上にそれぞれ点D，Eをとる。∠BAD＝∠CEDのとき，ECの長さを求めなさい。(青森)

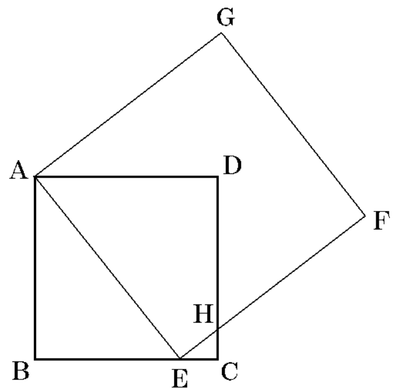


△ABCと△EDCの関係は？
ECを x とおいて考えて
ごらん。

7

基本問題　三角形の相似

　右の図のように，正方形ABCDの辺BC上に点Eをとり，AEを１辺とする正方形AEFGをつくる。辺CDと辺EFの交点をHとすると，△ABE∽△ECHである。このとき，次の問いに答えなさい。(栃木改題)



(1)　△ABE∽△ECHであることを証明した。$\boxed{}$をうめて証明を完成しなさい。

(証明)
△ABEと△ECHで，
　　∠ABE＝∠$\boxed{\text{ア}}$＝90°　　…①
△ABEで，∠BAE＋∠AEB＝90° より，
　　∠BAE＝90° －∠$\boxed{\text{イ}}$　　…②
また，
∠AEB＋∠CEH＝180° －90° ＝90° より，
　　∠CEH＝90° －∠$\boxed{\text{イ}}$　　…③
②，③より，
　　∠BAE＝∠$\boxed{\text{ウ}}$　　…④
①，④より，$\boxed{\text{エ}}$がそれぞれ等しいので，
　　△ABE∽△ECH

等しい角を
かき入れていこう。

(2)　AB＝5cm，BE＝4cmのとき，DHの長さを求めなさい。

相似比から，まず
CHの長さを求めよう。

8

まとめ　平行線と線分の比，中点連結定理

●平行線と線分の比(1)…三角形の相似比からいえる。

しっかり整理しよう。

△ABCで，辺AB，AC上の点をそれぞれD，Eとするとき，

① DE∥BCならば，

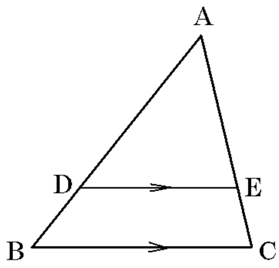
AD：AB＝AE：AC＝DE：BC

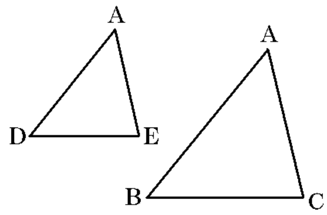
AD：DB＝AE：EC

② AD：AB＝AE：AC　または，

AD：DB＝AE：EC　ならば，

DE∥BC





△ADE∽△ABC からいえる。

（例）右の図の△ABCで，DE∥BCのとき，

9：x＝6：4

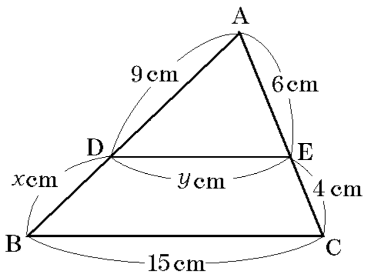
6x＝9×4

6x＝36　　<u>x＝6 (cm)</u>

6：(6＋4)＝y：15　　⇒**6：4ではない！**

(6＋4)y＝6×15

10y＝90　　<u>y＝9 (cm)</u>

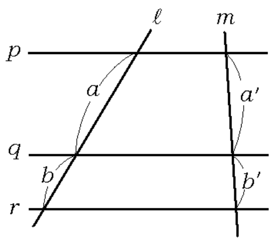


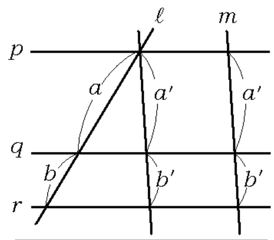
●平行線と線分の比(2)…３本の平行線と線分の関係。

２つの直線が，３つの平行な直線と，右の図のように交わっているとき，次の関係が成り立つ。

① $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a'}:\boldsymbol{b'}$

② $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a'}=\boldsymbol{b}:\boldsymbol{b'}$



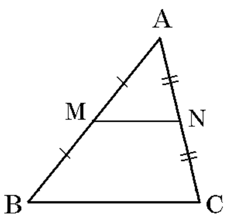


mと平行な直線をひくと，上の三角形の関係がいえる。

●中点連結定理…よく使われるから，しっかり覚えよう。

△ABCの２辺AB，AC上の中点をそれぞれM，Nとするとき，

MN∥BC，MN＝$\frac{1}{2}$BC



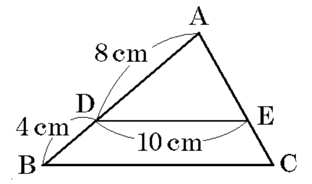
△AMN∽△ABC
相似比は1:2である
ことから，MNはBC
の半分になる。

⇒MNはBCに平行で，長さが半分になる。

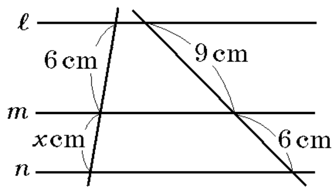
基礎チェック１　平行線と線分の比

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図で，DE // BCであるとき，線分BCの長さを求めなさい。（岩手）



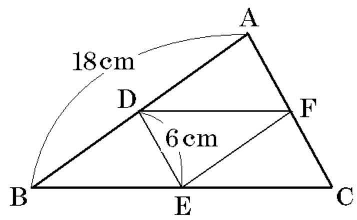
(2)　右の図のように，直線 ℓ，m，n がそれぞれ平行であるとき，x の値を答えなさい。（新潟）



計算のしかたを
つかもうね。

基礎チェック２　中点連結定理

右の図の△ABCで，点D，E，Fは，それぞれの辺AB，BC，CAの中点である。AB＝18cm，DE＝6cmのとき，次の問いに答えなさい。



(1)　線分EFの長さを求めなさい。

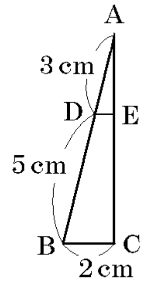
DF // BC，DF＝$\frac{1}{2}$BC

(2)　線分ACの長さを求めなさい。

9

基本問題　**平行線と線分の比**

図において，DE // BCのとき，DEの長さを求めなさい。（島根）



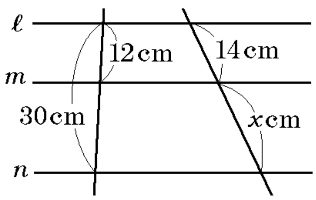
10

基本問題　**平行線と線分の比**

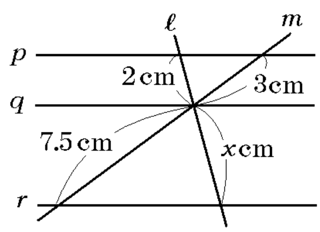
ℓ を m と交わらないように平行移動すると，(1)と同じになるよ。

次の問いに答えなさい。

(1)　下の図で，ℓ // m // n のとき，x の値を求めなさい。（青森）



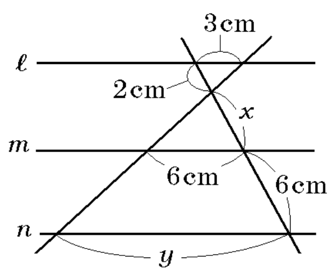
(2)　下の図のように，２つの直線 ℓ，m が３つの平行な直線 p，q，r と交わるとき，x の値を求めなさい。（和歌山）



11

基本問題　**平行線と線分の比**

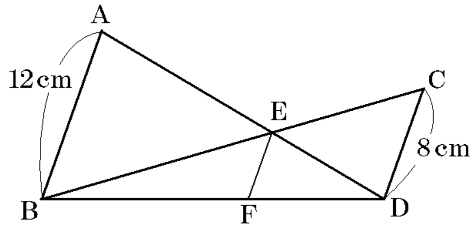
右の図で，直線 ℓ，m，n がいずれも平行であるとき，x，y の長さはそれぞれ何cmか。（鹿児島改題）



相似な三角形が３つあるね。
相似比をうまく利用しよう。

12
基本問題　平行線と線分の比

　右の図で，AB＝12cm，CD＝8cmで，
AB // EF // CDのとき，EFの長さを求めます。
次の問いに答えなさい。



(1)　△EAB∽△EDCである。相似比を求めなさい。

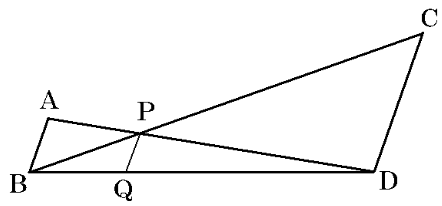
(2)　BE：ECを求めなさい。

この問題の考え方を
マスターしよう。

(3)　(2)より，△BDCに注目して，EFの長さを求めなさい。

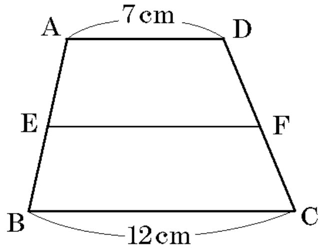
13
基本問題　平行線と線分の比

　右の図において，AB＝6cm，CD＝15cmで，
AB // PQ // CDのとき，線分PQの長さを求めなさ
い。（鳥取）



14
基本問題　中点連結定理

　図において，四角形ABCDは，AD // BCの台形であり，
E，Fはそれぞれ辺AB，CDの中点である。
AD＝7cm，BC＝12cmのとき，EFの長さを求めなさい。
（島根）

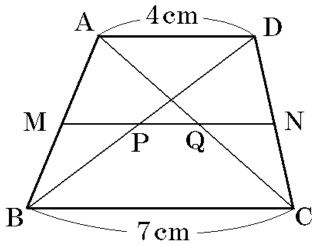


Aを通り，DCに平行な
直線をひいてみよう。

15

基本問題　中点連結定理

右の図のように，AD∥BCである台形ABCDがある。辺ABの中点Mを通り辺BCに平行な直線と辺CDとの交点をＮとし，線分MNと線分BDの交点をＰ,線分MNと線分ACの交点をＱとするとき，線分PQの長さを求めなさい。(山口)



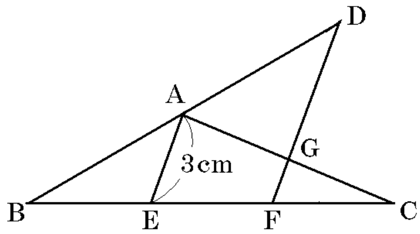
まず，MNを求めておこう。

16

基本問題　中点連結定理

右の図のように，△ABCの辺ＢＡを延長し，BA＝ADとなるように点Ｄをとり，辺BCを３等分する点をそれぞれＥ，Ｆとする。辺ACと線分DFの交点をＧとする。

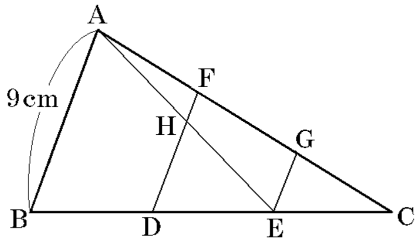
このとき，DGの長さを求めなさい。(青森)



17

基本問題　中点連結定理

右の図のようなAB＝9cmの△ABCがある。点Ｄ，Ｅは辺BCを３等分する点で，FD∥AB，GE∥ABとなるように辺AC上に２点Ｆ，Ｇをとる。AEとFDの交点をＨとすると，FH＝$\boxed{}$cmである。(島根)



18

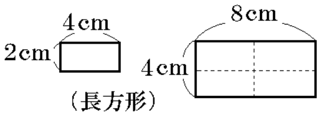
まとめ　相似比と面積比・体積比

●相似な平面図形と面積比…相似比との関係をとらえよう。

相似な平面図形では，周の長さの比は相似比に等しく，面積比は相似比の２乗に等しい。

相似比＝$m：n$　ならば，　周の長さの比＝$m：n$　　面積比＝$m^2：n^2$

（例）　相似比＝1：2



（長方形）

周の長さの比

2×2+4×2：4×2+8×2＝12：24＝1：2

面積比

2×4：4×8＝8：32　＝1：4＝$1^2：2^2$

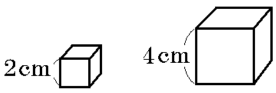
面積は，たてが２倍，横が２倍で，２×２＝４倍になる。

●相似な立体と体積比…相似比との関係をとらえよう。

相似な立体では，表面積の比は相似比の２乗に等しく，体積比は相似比の３乗に等しい。

相似比＝$m：n$　ならば，　表面積の比＝$m^2：n^2$　　体積比＝$m^3：n^3$

（例）　相似比＝1：2



（立方体）

表面積の比

2×2×6：4×4×6＝24：96＝1：4＝$1^2：2^2$

体積比

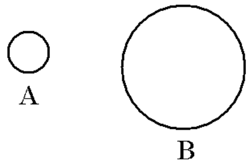
2×2×2：4×4×4＝8：64＝1：8＝$1^3：2^3$

体積は，１辺が２倍で，２×２×２＝８倍になる。

基礎チェック１　相似比と面積比・体積比

　右の図のように，円Ａ，Ｂがあり，ＡとＢの相似比は1：3である。円Ａの面積が4π cm^{2}であるとき，円Ｂの面積は［　　　　］cm^{2}である。

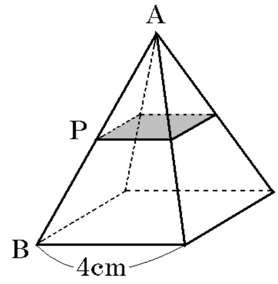
（岡山）



相似比が１：３だと，
面積比はどうなるかな？

基礎チェック２　相似比と面積比・体積比

　右の図は，底面の１辺の長さが４cmの正四角錐（すい）である。辺ＡＢの中点Ｐを通り底面に平行な平面で正四角錐を切るとき，次の問いに答えなさい。（栃木改題）



(1)　切り口の面積を求めなさい。

(2)　正四角錐全体の体積が$64cm^3$のとき，切りとった小さな正四角錐の体積を求めなさい。

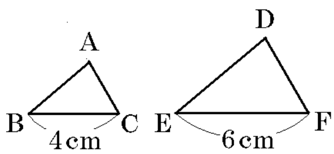
まず，相似比をしっかりとらえようね。

19

基本問題　相似比と面積比・体積比

　次の問いに答えなさい。

(1)　右の図で，△ABC∽△DEFであるとき，△ABCと△DEFの面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。（福島）



(2)　△ABCと△DEFは相似で，その相似比は2：3である。△ABCの面積が$8cm^2$であるとき，△DEFの面積は何cm^2か。（香川）

20

基本問題　相似比と面積比・体積比

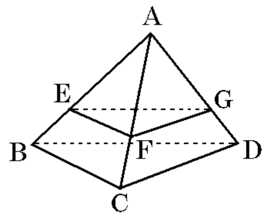
右の図のように，三角錐（すい）ABCDがあり，辺AB，AC，AD上にそれぞれ点E，F，Gを，

AE：EB＝AF：FC＝AG：GD＝２：１

となるようにとる。

このとき，三角錐AEFGと三角錐ABCDの体積の比を求めなさい。

（富山）



21

基本問題　相似比と面積比・体積比

右の図において，円柱Ａと円錐Ｂは高さが等しく，Ａの底面の半径はＢの底面の半径の２倍である。Ａの体積はＢの体積の何倍になるか，求めなさい。ただし，円周率はπとする。

（群馬）